

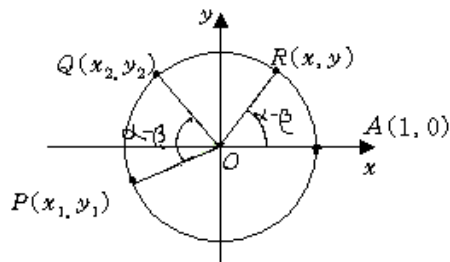
삼각함수

1. 삼각함수의 덧셈정리

① 삼각함수의 덧셈정리

삼각함수 $\sin(\alpha + \beta)$, $\cos(\alpha + \beta)$, $\tan(\alpha + \beta)$ 등을 α 또는 β 의 삼각함수로 나타낼 수 있다.

각 α 와 각 β 에 대하여 $\alpha > 0$, $\beta > 0$ 이고 $0 \leq \alpha - \beta < \beta$ 를 만족한다고 가정하자. 다른 경우에도 같은 방법으로 증명할 수 있다.



각 α 와 각 β 에 대하여 $\theta = \alpha - \beta$ 라고 놓자. 위의 그림에서 원점에서 거리가 1이고 편각이 각각 α, β, θ 인 점들을 $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$, $R(x, y)$ 라고 놓으면, 점 P, Q, R 은 모두 단위원 위에 있다. 삼각함수의 정의에 의하여 다음 식이 성립한다.

$$\cos \alpha = x_1, \quad \cos \beta = x_2, \quad \cos \theta = x \quad \cdots \cdots ①$$

$$\sin \alpha = y_1, \quad \sin \beta = y_2, \quad \sin \theta = y \quad \cdots \cdots ②$$

점 $A(1, 0)$ 에 대하여 $\angle AOR = \angle POQ = \alpha - \beta$ 이므로 $\overline{AR} = \overline{PQ}$ 이다. 따라서 $\sqrt{(x-1)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$ 이고 양변에 제곱을 해서 전개하면 다음과 같이 된다.

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 = x_1^2 - 2x_1y_1 + y_1^2 + x_2^2 - 2x_2y_2 + y_2^2$$

점 P, Q, R 이 단위원 위에 있는 점이므로 $x^2 + y^2 = x_1^2 + y_1^2 = x_2^2 + y_2^2 = 1$ 을 만족하고, 위 식으로부터 $2 - 2x = 2 - 2x_1y_1 - 2x_2y_2$, 즉 $x = x_1y_1 + x_2y_2$ 이다. 따라서 식 ①, ②에서

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \quad \cdots \cdots ③$$

가 된다. 이 공식에서 β 에 $-\beta$ 를 대입하면

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

가 된다.

식 ③으로부터

$$\begin{aligned}\sin(\alpha + \beta) &= \cos\left[\frac{\pi}{2} - (\alpha + \beta)\right] = \cos\left[\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \beta\right] \\ &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\cos\beta + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\sin\beta = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta\end{aligned}$$

이 공식에서 β 에 $-\beta$ 를 대입하면

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$$

$$\text{또, } \tan(\alpha + \beta) = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} = \frac{\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta}$$

이므로, 우변의 분모, 분자를 $\cos\alpha\cos\beta (\neq 0)$ 로 나누면,

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$$

이 공식에서 β 에 $-\beta$ 를 대입하면

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta}$$

이들 공식을 삼각함수의 덧셈정리라고 한다.

[정리 1] 삼각함수의 덧셈정리

$$\begin{aligned}(1) \quad & \begin{cases} \sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta \\ \sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta \end{cases} \\ (2) \quad & \begin{cases} \cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \\ \cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta \end{cases} \\ (3) \quad & \begin{cases} \tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta} \\ \tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta} \end{cases}\end{aligned}$$

예를 들면 덧셈정리를 이용하여 다음과 같이 $\sin 15^\circ$ 의 값을 구할 수 있다.

$$\sin 15^\circ = \sin(45^\circ - 30^\circ) = \sin 45^\circ \cos 30^\circ - \cos 45^\circ \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

[예제 1] $\sin\alpha = \frac{1}{3}$, $\cos\beta = \frac{1}{4}$ (단, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$) 일 때, $\sin(\alpha + \beta)$ 와 $\cos(\alpha - \beta)$ 의 값을 구하여라.

(풀이) $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$ 이므로 $\cos\alpha < 0$, $\sin\beta > 0$ 이다. 그러므로

$$\cos\alpha = -\sqrt{1 - \sin^2\alpha} = -\sqrt{1 - \frac{1}{9}} = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\sin\beta = \sqrt{1 - \cos^2\beta} = \sqrt{1 - \frac{1}{16}} = \frac{\sqrt{15}}{4}$$

따라서 구하는 값은 각각 다음과 같다.

$$\begin{aligned}\sin(\alpha + \beta) &= \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \\ &= \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} + \left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right) \times \frac{\sqrt{15}}{4} = \frac{1-2\sqrt{30}}{12} \\ \cos(\alpha - \beta) &= \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \\ &= \left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right) \times \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{15}}{4} = \frac{\sqrt{15}-2\sqrt{2}}{12}\end{aligned}$$

[예제 2] $\alpha + \beta = \frac{\pi}{4}$ 일 때, $(1 + \tan \alpha)(1 + \tan \beta)$ 의 값을 구하여라.

(풀이) $\tan(\alpha + \beta) = 1$ 이므로 덧셈공식을 이용하면

$$(1 + \tan \alpha)(1 + \tan \beta) = 1 + \tan \alpha + \tan \beta + \tan \alpha \tan \beta = 2 \text{ 이다.}$$

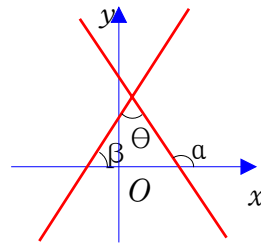
[예제 3] 두 직선 $x + 5y + 3 = 0$, $2x - 3y + 1 = 0$ 이 이루는 예각의 크기를 구하여라.

(풀이) 두 직선 $x + 5y + 3 = 0$, $2x - 3y + 1 = 0$ 이 x 축의 양의 방향과 이루는 각을 각각 α , β 라 하면

$$\tan \alpha = -\frac{1}{5}, \quad \tan \beta = \frac{2}{3}$$

두 직선이 이루는 예각을 θ 라 하면

$$\begin{aligned}\tan \theta &= |\tan(\alpha - \beta)| = \left| \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta} \right| \\ &= \left| \frac{-\frac{1}{5} - \frac{2}{3}}{1 + \left(-\frac{1}{5}\right) \cdot \frac{2}{3}} \right| = 1\end{aligned}$$



따라서 $\theta = 45^\circ$ 이다.

② 삼각함수의 합성

삼각함수의 덧셈정리를 이용하면 $a \sin \theta + b \cos \theta$ 와 같은 합의 꼴의 삼각함수를 $r \sin(\theta + \alpha)$ ($r > 0$) 꼴의 삼각함수로 변형할 수 있는 데 이것을 **삼각함수의 합성**이라고 한다.

좌표평면 위에 점 $P(a, b)$ 를 잡고 $\overline{OP}$ 와 x 축의 양의 방향이 이루는 각의 크기를 α 라고 하면,

$$\overline{OP} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\cos \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \sin \alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

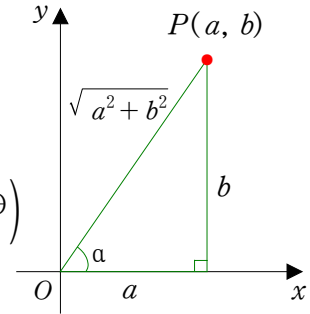
$a \sin \theta + b \cos \theta$ 를 $\sqrt{a^2 + b^2}$ 으로 묶으면

$$a \sin \theta + b \cos \theta$$

$$= \sqrt{a^2 + b^2} \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin \theta + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos \theta \right)$$

$$= \sqrt{a^2 + b^2} (\cos \alpha \sin \theta + \sin \alpha \cos \theta)$$

$$= \sqrt{a^2 + b^2} \sin(\theta + \alpha)$$



[정리 2] (삼각함수의 합성)

$$a \sin \theta + b \cos \theta = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(\theta + \alpha)$$

$$\left(\text{단, } \cos \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \sin \alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)$$

[예제 4] $\sin \theta + \sqrt{3} \cos \theta$ 를 $r \sin(\theta + \alpha)$ 의 꼴로 변형하여라.

(풀이) $a=1, b=\sqrt{3}$ 이므로, 점 $P(1, \sqrt{3})$ 을 정하면

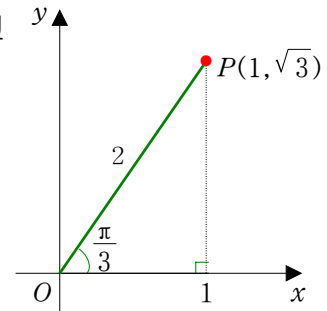
$$r = \overline{OP} = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$$

또, 동경 OP 가 나타내는 각을 α 라 하면

$$\cos \alpha = \frac{1}{2}, \sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ 에서 } \alpha = \frac{\pi}{3} \text{ 이다.}$$

따라서

$$\sin \theta + \sqrt{3} \cos \theta = 2 \left(\frac{1}{2} \sin \theta + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \theta \right) = 2 \sin \left(\theta + \frac{\pi}{3} \right) \text{ 이다.}$$



[예제 5] 함수 $y = \sin \theta - \sqrt{3} \cos \theta$ ($\theta \in \mathbb{R}$) 의 최대값과 최소값을 구하여라.

(풀이) 좌표평면 위에 점 $P(1, -\sqrt{3})$ 을 잡으면

$$\overline{OP} = \sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2} = 2$$

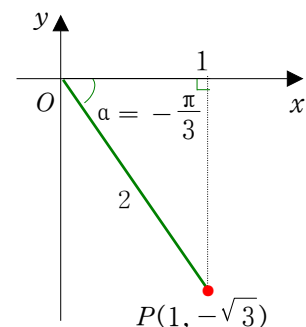
$$\sin \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \cos \alpha = \frac{1}{2} \text{ 이므로 } \alpha = -\frac{\pi}{3} \text{ 이다.}$$

삼각함수를 합성하면

$$y = \sin \theta - \sqrt{3} \cos \theta = 2 \sin \left(\theta - \frac{\pi}{3} \right) \text{ 이 되고,}$$

$$-1 \leq \sin \left(\theta - \frac{\pi}{3} \right) \leq 1 \text{ 이므로 } -2 \leq 2 \sin \left(\theta - \frac{\pi}{3} \right) \leq 2 \text{ 이다.}$$

따라서 최대값은 2, 최소값은 -2이다.



2. 여러 가지 공식

① 배각의 공식

삼각함수의 덧셈정리

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

에서 $\beta = \alpha$ 로 놓으면

$$\sin 2\alpha = \sin(\alpha + \alpha) = \sin \alpha \cos \alpha + \cos \alpha \sin \alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

같은 방법으로

$$\cos 2\alpha = \cos(\alpha + \alpha) = \cos \alpha \cos \alpha - \sin \alpha \sin \alpha$$

$$= \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2 \sin^2 \alpha$$

$$\tan 2\alpha = \tan(\alpha + \alpha) = \frac{\tan \alpha + \tan \alpha}{1 - \tan \alpha \cdot \tan \alpha} = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$$

이들 공식을 **배각의 공식**이라고 한다.

[공식 1] 배각의 공식

$$(1) \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$(2) \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2 \sin^2 \alpha$$

$$(3) \tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$$

[예제 6] α 가 제 2사분면의 각이고, $\cos \alpha = -\frac{4}{5}$ 일 때, 다음 값을 구하여라.

$$(1) \sin 2\alpha$$

$$(2) \cos 2\alpha$$

(풀이) α 가 제 2사분면의 각이면 $\sin \alpha > 0$ 이므로

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - \left(-\frac{4}{5}\right)^2} = \frac{3}{5} \text{ 이다.}$$

$$(1) \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha = 2 \cdot \frac{3}{5} \cdot \left(-\frac{4}{5}\right) = -\frac{24}{25}$$

$$(2) \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \left(-\frac{4}{5}\right)^2 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{7}{25}$$

[예제 7] $\pi < \alpha < \frac{3}{2}\pi$ 에서 $\tan \alpha = \frac{5}{12}$ 일 때, 다음 값을 구하여라.

$$(1) \sin 2\alpha$$

$$(2) \cos 2\alpha$$

$$(3) \tan 2\alpha$$

(풀이) $\sin \alpha = -\frac{5}{13}$, $\cos \alpha = -\frac{12}{13}$ 이므로 $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha = \frac{120}{169}$,

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \frac{119}{169}, \tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} = \frac{120}{119} \text{ 이다.}$$

[정리 1]의 삼각함수의 덧셈정리에서 $3\alpha = 2\alpha + \alpha$ 임을 이용하면 삼배각의 공식을 얻을 수 있다.

[공식 2] 삼배각의 공식

$$\begin{aligned} (1) \quad \sin 3\alpha &= 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha \\ (2) \quad \cos 3\alpha &= 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha \\ (3) \quad \tan 3\alpha &= \frac{3 \tan \alpha - \tan^3 \alpha}{1 - 3 \tan^2 \alpha} \end{aligned}$$

[예제 8] $\sin 18^\circ$ 의 값을 구하여라.

(풀이) $\alpha = 18^\circ$ 이면 $2\alpha + 3\alpha = 90^\circ$ 이다. $\sin 2\alpha = \sin(90^\circ - 3\alpha) = \cos 3\alpha$ 에서 삼각함수 배각공식과 삼배각의 공식을 쓰면 $2 \sin \alpha \cos \alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha$ 이고, $\cos \alpha \neq 0$ 이므로 $4 \sin^2 \alpha + 2 \sin \alpha - 1 = 0$ 이다.

따라서 $\sin \alpha = \sin 18^\circ = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4}$ 이다.

[2] 반각의 공식

배각의 공식 $\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha$ 에서

$$\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$$

또, 배각의 공식 $\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$ 에서

$$\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$$

따라서, $\tan^2 \alpha = \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{1 - \cos 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha}$

여기서 α 대신에 $\frac{\alpha}{2}$ 를 대입하면, 다음과 같은 반각의 공식을 얻는다.

[공식 3] 반각의 공식

$$\begin{aligned} (1) \quad \sin^2 \frac{\alpha}{2} &= \frac{1 - \cos \alpha}{2} \\ (2) \quad \cos^2 \frac{\alpha}{2} &= \frac{1 + \cos \alpha}{2} \\ (3) \quad \tan^2 \frac{\alpha}{2} &= \frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha} \end{aligned}$$

삼각함수의 덧셈정리에서 구한 $\sin 15^\circ$ 의 값을 반각의 공식을 써서 구하면,

$$\sin^2 15^\circ = \sin^2 \frac{30^\circ}{2} = \frac{1 - \cos 30^\circ}{2} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{2 - \sqrt{3}}{4}$$

$$\text{이므로 } \sin 15^\circ = \sqrt{\frac{4 - 2\sqrt{3}}{8}} = \frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \text{ 이다.}$$

[예제 9] $\sin \alpha = \frac{4}{5}$ 일 때, $\cos \frac{\alpha}{2}$ 의 값을 구하여라. (단, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$)

(풀이) α 가 제2사분면의 각이므로 $\cos \alpha < 0$ 이다. 따라서

$$\cos \alpha = -\sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = -\sqrt{1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2} = -\frac{3}{5}$$

반각의 공식에서

$$\cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{2} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{3}{5} \right) = \frac{1}{5}$$

$$\text{그런데 } \frac{\pi}{4} < \frac{\alpha}{2} < \frac{\pi}{2} \text{ 이고 } \cos \frac{\alpha}{2} > 0 \text{ 이므로 } \cos \frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{5}}{5} \text{ 이다.}$$

③ 곱을 합, 차로 고치는 공식

삼각함수의 덧셈정리에서

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \quad \dots\dots ④$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta \quad \dots\dots ⑤$$

④+⑤에서

$$\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) = 2 \sin \alpha \cos \beta$$

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} \{ \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) \}$$

④-⑤에서

$$\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta) = 2 \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} \{ \sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta) \}$$

같은 방법으로, 다음과 같은 공식을 얻게 된다.

[공식 4] 곱을 합, 차로 고치는 공식

$$(1) \sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} \{ \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) \}$$

$$(2) \cos \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} \{ \sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta) \}$$

$$(3) \cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} \{ \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) \}$$

$$(4) \sin \alpha \sin \beta = -\frac{1}{2} \{ \cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta) \}$$

[예제 10] $\sin 75^\circ \cos 15^\circ$ 의 값을 구하여라.

$$\begin{aligned} \text{(풀이)} \quad \sin 75^\circ \cos 15^\circ &= \frac{1}{2} \{ \sin(75^\circ + 15^\circ) + \sin(75^\circ - 15^\circ) \} \\ &= \frac{1}{2} (\sin 90^\circ + \sin 60^\circ) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{2 + \sqrt{3}}{4} \end{aligned}$$

[4] 합, 차를 곱으로 고치는 공식

삼각함수의 곱을 합, 차로 고치는 공식에서 $\alpha + \beta = A$, $\alpha - \beta = B$ 로 놓으면

$$\alpha = \frac{A+B}{2}, \quad \beta = \frac{A-B}{2}$$

이므로, 다음 공식을 얻는다.

[공식 5] 합, 차를 곱으로 고치는 공식

$$\begin{aligned} (1) \quad \sin A + \sin B &= 2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2} \\ (2) \quad \sin A - \sin B &= 2 \cos \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2} \\ (3) \quad \cos A + \cos B &= 2 \cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2} \\ (4) \quad \cos A - \cos B &= -2 \sin \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2} \end{aligned}$$

[예제 11] $\cos 4\theta + \cos 2\theta$ 를 삼각함수의 곱으로 나타내어라.

$$\text{(풀이)} \quad \cos 4\theta + \cos 2\theta = 2 \cos \frac{4\theta + 2\theta}{2} \cdot \cos \frac{4\theta - 2\theta}{2} = 2 \cos 3\theta \cos \theta$$

[참고] $a \sin \theta + b \cos \theta$ 와 같이 각 θ 가 같을 때는 삼각함수의 합성을 이용하고, $\sin \alpha + \sin \beta$ ($\alpha \neq \beta$)와 같이 삼각함수의 모양은 같고 각이 다를 때에는 합을 곱의 꼴로 고치는 공식을 이용한다.

[예제 12] 다음 식의 값을 구하여라.

$$(1) \sin 165^\circ + \sin 15^\circ \quad (2) \cos 195^\circ - \cos 15^\circ$$

$$\begin{aligned} \text{(풀이)} \quad (1) \quad \sin 165^\circ + \sin 15^\circ &= 2 \sin \frac{165^\circ + 15^\circ}{2} \cos \frac{165^\circ - 15^\circ}{2} \\ &= 2 \sin 90^\circ \cos 75^\circ = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2} \\ (2) \quad \cos 195^\circ - \cos 15^\circ &= -2 \sin \frac{195^\circ + 15^\circ}{2} \sin \frac{195^\circ - 15^\circ}{2} \\ &= -2 \sin 105^\circ \sin 90^\circ = -\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

3. 삼각방정식

각의 크기가 미지인 삼각함수를 포함하는 방정식을 **삼각방정식**(trigonometric equation)이라 하고, 그 방정식의 해를 구하는 것을 **삼각방정식을 푼다**고 한다.

$0 \leq x < 2\pi$ 인 범위에서 삼각방정식 $\sin x = \frac{1}{2}$ 의 해를 구하면

$$x = \frac{\pi}{6}, x = \frac{5}{6}\pi \quad \cdots \cdots ①$$

또 사인함수는 주기가 2π 인 주기함수이므로 m 을 정수라고 할 때, 주어진 방정식의 모든 해는

$$x = 2m\pi + \frac{\pi}{6}, x = 2m\pi + \frac{5}{6}\pi \quad \cdots \cdots ②$$

로 나타낼 수 있다. 그런데

$$2m\pi + \frac{5}{6}\pi = 2m\pi + \pi - \frac{\pi}{6} = (2m+1)\pi - \frac{\pi}{6}$$

이므로 ②를 하나의 식으로 나타내면

$$x = n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{6} \quad (n \text{ 은 정수}) \quad \cdots \cdots ③$$

여기서 ①과 같이 특정한 범위에서 구한 해를 **특수해**, ③과 같이 일반각으로 나타낸 해를 **일반해**라고 한다.

일반적으로 삼각방정식의 일반해는 다음과 같다.

[정리 3] 삼각방정식의 특수해가 α 일 때, n 이 임의의 정수이면

(1) $\sin x = a \quad (|a| \leq 1)$ 의 일반해는 $x = n\pi + (-1)^n \alpha$

(2) $\cos x = a \quad (|a| \leq 1)$ 의 일반해는 $x = 2n\pi \pm \alpha$

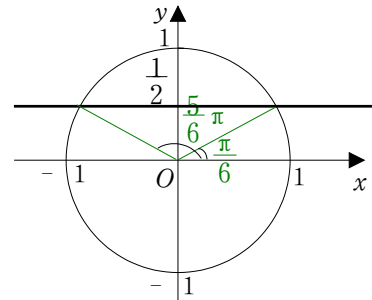
(3) $\tan x = a$ 의 일반해는 $x = n\pi + \alpha$

[참고] α 의 값은 흔히 $-\pi \leq \alpha < \pi$ 또는 $0 \leq \alpha < 2\pi$ 인 범위에서 구한다.

[예제 13] $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\tan x = \sqrt{3}$ 의 일반해를 각각 구하여라.

(풀이) $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 에서 $x = 2n\pi \pm \frac{\pi}{6}$ (n 은 정수) 이고,

$\tan x = \sqrt{3}$ 에서 $x = n\pi + \frac{\pi}{3}$ (n 은 정수) 이다.



[참고] 삼각방정식의 해법

- (1) 여러 가지 공식을 이용하여 한 종류의 삼각함수로 고쳐서 푼다.
- (2) $a\sin x + b\cos x = c$ 의 꼴은 삼각함수의 합성을 이용한다
- (3) 합, 차를 곱으로 고치는 공식을 이용하여 (곱)=0 꼴로 유도한다.
- (4) 삼각방정식을 만족시키는 근의 하나 α 가 주어질 때는 α 를 하나의 특수해로 생각하여 푼다.

$$\sin x = \sin \alpha \Rightarrow x = n\pi + (-1)^n \alpha \quad (\text{단, } n \text{ 은 정수})$$

$$\cos x = \cos \alpha \Rightarrow x = 2n\pi \pm \alpha \quad (\text{단, } n \text{ 은 정수})$$

$$\tan x = \tan \alpha \Rightarrow x = n\pi + \alpha \quad (\text{단, } n \text{ 은 정수})$$

[예제 14] 삼각방정식 $2\cos^2 x + 3\sin x - 3 = 0$ 을 풀어라.

(풀이) $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ 이므로 $2\sin^2 x - 3\sin x + 1 = 0$ 이고

$(2\sin x - 1)(\sin x - 1) = 0$ 에서 $\sin x = \frac{1}{2}$ 또는 $\sin x = 1$ 이다.

$\sin x = \frac{1}{2}$ 에서 $x = n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{6}$ (n 은 정수) 이고,

$\sin x = 1$ 에서 $x = n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{2}$ (n 은 정수) 이다.

[참고] $\sin x = 1$ 을 만족하는 x 는 $x = 2n\pi + \frac{\pi}{2}$ (n 은 정수) 로 쓸수도 있다.

[예제 15] 삼각방정식 $\sqrt{3}\sin x - \cos x = \sqrt{2}$ 을 풀어라.

(풀이) 삼각함수의 합성을 이용하면

$$\sqrt{3}\sin x - \cos x = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x - \frac{1}{2}\cos x\right) = 2\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{2} \quad \text{이므로}$$

$$\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{에서} \quad x - \frac{\pi}{6} = n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{4} \quad (n \text{ 은 정수}) \text{이다.}$$

그러므로 $x = n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}$ (n 은 정수) 이다.

[예제 16] 삼각방정식 $\cos 3x + \cos x = \cos 2x$ 을 풀어라.

(풀이) 삼각함수의 곱으로 고치면 $2\cos 2x \cos x = \cos 2x$ 이므로 $\cos 2x = 0$

또는 $\cos x = \frac{1}{2}$ 이다. 따라서 $x = n\pi \pm \frac{\pi}{4}$ 또는 $x = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3}$ 이다.

[예제 17] 삼각방정식 $\tan\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \tan \frac{\pi}{5}$ 을 풀어라.

(풀이) $2x - \frac{\pi}{4} = n\pi + \frac{\pi}{5}$ 이므로 $2x = n\pi + \frac{9}{20}\pi$ 이고, $x = \frac{n}{2}\pi + \frac{9}{40}\pi$ 이다.

다음 정리는 삼각함수의 그래프를 이용하면 쉽게 증명된다.

[정리 4] (1) $-1 < a < 1$ 이면 방정식 $\sin x = a$ 와 $\cos x = a$ 는 $0 \leq x < 2\pi$ 에서 두 개의 해를 갖는다.
 (2) 실수 a 에 대하여 방정식 $\tan x = a$ 와 $\cot x = a$ 는 $0 \leq x < 2\pi$ 에서 두 개의 해를 갖는다.
 (3) $a > 1$ 또는 $a < -1$ 이면 방정식 $\sec x = a$ 와 $\csc x = a$ 는 $0 \leq x < 2\pi$ 에서 두 개의 해를 갖는다.

[예제 18] 방정식 $\sec(2x + \pi) = -\sqrt{2}$ 의 해를 구하여라.

(풀이) $t = 2x + \pi$ 라고 놓으면 $\sec t = -\sqrt{2}$ 이다. [정리 4]에 의하면 방정식 $\sec t = -\sqrt{2}$ 는 $0 \leq t < 2\pi$ 에서 두 개의 해 $t = 3\pi/4$ 또는 $t = 5\pi/4$ 를 가지므로 일반해는 $t = \frac{3\pi}{4} + 2n\pi$ 또는 $t = \frac{5\pi}{4} + 2n\pi$ 이다. $t = 2x + \pi$ 이므로 방정식의 해는 $x = -\frac{\pi}{8} + n\pi$ 또는 $x = \frac{\pi}{8} + n\pi$ (n 은 정수)이다.

삼각함수의 그래프를 이용하면 다음 정리의 결과를 얻을 수 있다.

[정리 5] (1) 삼각함수의 값이 $0, 1, -1$ 이 되는 경우의 일반해는 다음과 같다.
 (단, n 은 정수)
 $\sin x = 0 \Rightarrow x = n\pi$, $\sin x = 1 \Rightarrow x = 2n\pi + \frac{\pi}{2}$, $\sin x = -1 \Rightarrow x = 2n\pi - \frac{\pi}{2}$
 $\cos x = 0 \Rightarrow x = n\pi + \frac{\pi}{2}$, $\cos x = 1 \Rightarrow x = 2n\pi$, $\cos x = -1 \Rightarrow x = 2n\pi + \pi$
 $\tan x = 0 \Rightarrow x = n\pi$, $\tan x = 1 \Rightarrow x = n\pi + \frac{\pi}{4}$, $\tan x = -1 \Rightarrow x = n\pi - \frac{\pi}{4}$
 (2) 실수 a 에 대하여 $\sin x = a$ 와 $\cos x = a$ 는 $|a| > 1$ 일 때 해가 없다.
 $\tan x = a$ 는 a 의 값에 관계없이 항상 해가 있다.

4. 삼각부등식

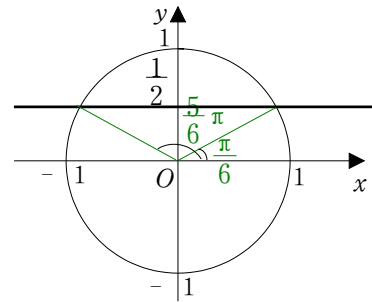
각의 크기가 미지인 삼각함수를 포함하는 부등식을 **삼각부등식**(trigonometric inequality)이라 하고, 그 방정식의 해를 구하는 것을 **삼각부등식을 푼다**고 한다.

$0 \leq x < 2\pi$ 인 범위에서 삼각방정식 $\sin x > \frac{1}{2}$ 의 해를 구해보자. 먼저 삼각방정

식 $\sin x = \frac{1}{2}$ ($0 \leq x < 2\pi$) 을 만족하는 x 를 구하면

$$x = \frac{\pi}{6}, x = \frac{5}{6}\pi \quad \cdots \cdots ①$$

이므로 $\sin x > \frac{1}{2}$ ($0 \leq x < 2\pi$) 의 해는 $\frac{\pi}{6} < x < \frac{5}{6}\pi$ 이다.



또, 사인함수는 주기가 2π 인 주기함수이므로

m 을 정수라고 할 때, $\sin x > \frac{1}{2}$ 의 모든 해는

$$2m\pi + \frac{\pi}{6} < x < 2m\pi + \frac{5}{6}\pi \quad \cdots \cdots ②$$

로 나타낼 수 있다.

여기서, ①과 같이 특정한 범위에서 구한 해를 **특수해**, ②과 같이 일반각으로 나타낸 해를 **일반해**라고 한다.

일반적으로, 삼각부등식의 일반해는 다음과 같다.

[정리 6] 삼각부등식의 특수해가 α 일 때, n 이 임의의 정수이면

(1) $\sin x > a$ ($|a| \leq 1$) 의 해는 $2n\pi + \alpha < x < (2n+1)\pi - \alpha$

(2) $\cos x > a$ ($|a| \leq 1$) 의 해는 $2n\pi - \alpha < x < 2n\pi + \alpha$

(3) $\tan x > a$ ($a \in R$) 의 해는 $n\pi + \alpha < x < n\pi + \pi/2$

[참고] α 의 값은 흔히 $-\pi \leq \alpha < \pi$ 또는 $0 \leq \alpha < 2\pi$ 인 범위에서 구한다.

[예제 19] $\cos x > \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\tan x > \sqrt{3}$ 의 일반해를 각각 구하여라.

(풀이) $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 에서 $x = 2n\pi \pm \frac{\pi}{6}$ 이므로

$2n\pi - \frac{\pi}{6} < x < 2n\pi + \frac{\pi}{6}$ (n 은 정수), $\tan x = \sqrt{3}$ 에서 $x = n\pi + \frac{\pi}{3}$ 이므로

$n\pi + \frac{\pi}{3} < x < n\pi + \frac{\pi}{2}$ (n 은 정수) 이다.

[참고] 삼각부등식의 해법

- (1) $\sin x \geq a$, $\cos x \geq a$, $\tan x \geq a$ (또는 $>$, $\leq$, $<$)의 꼴로 고친다.
- (2) 부등호를 등호로 바꿔 놓은 삼각방정식에서 특수해를 구한다.
- (3) 단위원 또는 삼각함수의 그래프를 이용하여 한 주기에서 x 의 범위를 구한다.

[예제 20] 삼각부등식 $\sin x + \cos x > 1$ ($0 \leq x < 2\pi$)을 풀어라.

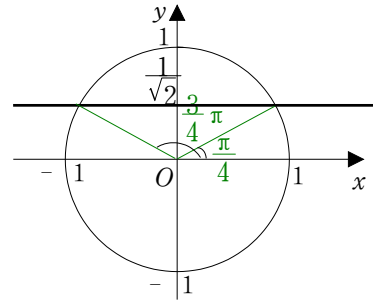
(풀이) 삼각함수 합성을 이용하면 $\sin x + \cos x > 1$ 에서

$$\sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) > 1 \text{ 이다. } x + \frac{\pi}{4} = X \text{ 놓으면}$$

$$\frac{\pi}{4} \leq X < \frac{9}{4}\pi \text{ 이고 } \sin X > \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ 의 해는}$$

$$\frac{\pi}{4} < X < \frac{3}{4}\pi, \text{ 즉 } \frac{\pi}{4} < x + \frac{\pi}{4} < \frac{3}{4}\pi \text{ 이므로}$$

$$0 < x < \frac{\pi}{2} \text{ 이다.}$$



[예제 21] 부등식 $\sin x - \cos 2x \geq 0$ ($0 \leq x < 2\pi$)을 풀어라.

(풀이) 배각공식에서 $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$ 이므로 $\sin x - \cos 2x \geq 0$ 에서

$$\sin x - (1 - 2\sin^2 x) \geq 0 \text{ 이고 } 2\sin^2 x + \sin x - 1 = (2\sin x - 1)(\sin x + 1) \geq 0$$

이므로 $\sin x \geq \frac{1}{2}$ 또는 $\sin x = -1$ 이다. 따라서 $\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{5}{6}\pi$ 또는 $x = \frac{3}{2}\pi$ 이다.

[예제 22] 부등식 $2\sin^2 x \leq 3\cos x$ ($0 \leq x < 2\pi$)를 풀어라.

(풀이) $2\sin^2 x \leq 3\cos x$ 에서 삼각함수의 항등식을 쓰면 $2\cos^2 x + 3\cos x - 2 \geq 0$

즉 $(2\cos x - 1)(\cos x + 2) \geq 0$ 이고, $\cos x + 2 > 0$ 이므로 $\cos x \geq \frac{1}{2}$ 이다. 따라서

$$0 \leq x \leq \frac{\pi}{3}, \frac{5}{3}\pi \leq x < 2\pi \text{ 이다.}$$