1. 삼각함수

① 사인, 코사인의 덧셈정리

$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$

$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$

$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$

$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$

보기 **1.** $\sin 15^\circ$의 값을 구하여라.

연구 $\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$이므로

$$\sin 15^\circ=\sin(45^\circ-30^\circ)=\sin 45^\circ\cos 30^\circ-\cos 45^\circ\sin 30^\circ$$
$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{1}{2}$$
$$=\boldsymbol{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}$$

보기 **2.** $\cos\frac{7}{12}\pi$의 값을 구하여라.

연구 $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$이므로

$$\cos\frac{7}{12}\pi=\cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)=\cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4}-\sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4}$$
$$=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$=\boldsymbol{\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}}$$

② 탄젠트의 덧셈정리

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$$

$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$$

보기 $\tan 75^\circ$의 값을 구하여라.

연구 $\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$이므로

$$\tan 75^\circ=\tan(45^\circ+30^\circ)=\frac{\tan 45^\circ+\tan 30^\circ}{1-\tan 45^\circ\tan 30^\circ}=\frac{1+\frac{1}{\sqrt{3}}}{1-\frac{1}{\sqrt{3}}}=\boldsymbol{2+\sqrt{3}}$$

더 알아보자

① 삼각함수 사이의 관계

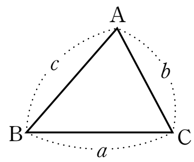
$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\cos\theta$

$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\sin\theta$

$\sin(-\theta)=-\sin\theta$

$\cos(-\theta)=\cos\theta$

② 제2코사인 법칙



$\triangle$ABC에서

$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$

$\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}$

3 삼각함수의 합성

$$a\sin\theta+b\cos\theta=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\alpha)$$

$$\left(\text{단, }\cos\alpha=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\ \sin\alpha=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$$

이와 같이 $a\sin\theta+b\cos\theta$를 $r\sin(\theta+\alpha)(r>0)$와 같은 꼴로 변형하는 것을 삼각함수의 합성이라고 한다.

보기 **1.** $\sin\theta-\cos\theta$를 $r\sin(\theta+\alpha)$의 꼴로 나타내어라. (단, $r>0$)

연구 $\sin\theta-\cos\theta=\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta-\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta\right)$

$=\sqrt{2}\left(\sin\theta\cos\frac{\pi}{4}-\cos\theta\sin\frac{\pi}{4}\right)$

$=\boldsymbol{\sqrt{2}\sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)}$

보기 **2.** $\sin\theta-\cos\theta$를 $r\cos(\theta-\alpha)$의 꼴로 나타내어라. (단, $r>0$)

연구 $\sin\theta-\cos\theta=\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta-\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta\right)$

$=\sqrt{2}\left(\sin\theta\sin\frac{3}{4}\pi+\cos\theta\cos\frac{3}{4}\pi\right)$

$=\boldsymbol{\sqrt{2}\cos\left(\theta-\frac{3}{4}\pi\right)}$

보기 **3.** $2\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta$의 최대값과 최소값을 구하여라.

연구 $2\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta=\sqrt{7}\left(\frac{2}{\sqrt{7}}\sin\theta+\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}\cos\theta\right)$

$=\sqrt{7}(\cos\alpha\sin\theta+\sin\alpha\cos\theta)$

$=\sqrt{7}\sin(\theta+\alpha)\ \left(\text{단, }\cos\alpha=\frac{2}{\sqrt{7}},\ \sin\alpha=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}\right)$

그런데 $-1\leq\sin(\theta+\alpha)\leq1$이므로 $-\sqrt{7}\leq\sqrt{7}\sin(\theta+\alpha)\leq\sqrt{7}$

따라서, 최소값은 $\boldsymbol{-\sqrt{7}}$, 최대값은 $\boldsymbol{\sqrt{7}}$이다.

보기 **4.** $\sqrt{3}\cos\theta-\sin\theta=1$일 때, θ의 값을 구하여라. $\left(\text{단, }0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$

연구 $\sqrt{3}\cos\theta-\sin\theta=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta-\frac{1}{2}\sin\theta\right)$

$=2\left(\cos\frac{\pi}{6}\cos\theta-\sin\frac{\pi}{6}\sin\theta\right)=2\cos\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)$

$2\cos\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)=1$에서 $\cos\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$이므로

$\theta+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{3}\ \left(\because\ \frac{\pi}{6}<\theta+\frac{\pi}{6}<\frac{2}{3}\pi\right)$ $\quad\therefore\ \theta=\boldsymbol{\frac{\pi}{6}}$

더 알아보자

❀ $a\sin\theta+b\cos\theta$를 $r\cos(\theta-\beta)(r>0)$꼴로 고칠 수 있다.

4 배각의 공식

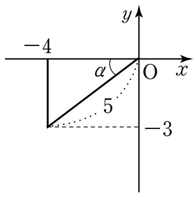
(1) $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$

(2) $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha$

(3) $\tan 2\alpha = \dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$

보기 **1.** α가 제 3 사분면의 각이고, $\sin\alpha = -\dfrac{3}{5}$일 때, $\sin 2\alpha$, $\cos 2\alpha$, $\tan 2\alpha$의 값을 구하여라.

연구 오른쪽 그림에서 보면 $\cos\alpha = -\dfrac{4}{5}$, $\tan\alpha = \dfrac{3}{4}$



(또는 $\cos\alpha = \pm\sqrt{1-\sin^2\alpha} = \pm\sqrt{1-\dfrac{9}{25}} = \pm\dfrac{4}{5}$

그런데 α가 제 3 사분면의 각이므로 $\cos\alpha < 0$

따라서, $\cos\alpha = -\dfrac{4}{5}$, $\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{3}{4}$)

배각의 공식에 의하면

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = 2\left(-\frac{3}{5}\right)\left(-\frac{4}{5}\right) = \mathbf{\frac{24}{25}}$$

$$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 1 - 2\left(-\frac{3}{5}\right)^2 = \mathbf{\frac{7}{25}}$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha} = \frac{2\cdot\frac{3}{4}}{1-\frac{9}{16}} = \mathbf{\frac{24}{7}}$$

보기 **2.** α가 제 2 사분면의 각이고, $\cos\alpha = -\dfrac{1}{3}$일 때, $\cos 3\alpha$의 값을 구하여라.

연구
$$\begin{aligned}\cos 3\alpha &= \cos(\alpha + 2\alpha)\\ &= \cos\alpha\cos 2\alpha - \sin\alpha\sin 2\alpha\\ &= \cos\alpha(2\cos^2\alpha - 1) - \sin\alpha\cdot 2\sin\alpha\cos\alpha\\ &= 2\cos^3\alpha - \cos\alpha - 2(1-\cos^2\alpha)\cos\alpha\\ &= 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha\\ &= 4\left(-\frac{1}{3}\right)^3 - 3\left(-\frac{1}{3}\right)\\ &= \mathbf{\frac{23}{27}}\end{aligned}$$

더 알아보자

3배각의 공식

$3\alpha = 2\alpha + \alpha$라 하면, 삼각함수의 덧셈정리와 배각의 공식을 이용하여 3배각의 공식을 구할 수 있다.

$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$

$\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$

5 반각의 공식

(1) $\sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{2}$

(2) $\cos^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{2}$

(3) $\tan^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}$

보기 **1.** $\cos 22.5^\circ$의 값을 구하여라.

연구 $\cos^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{2}$이므로

$$\cos^2 22.5^\circ=\frac{1+\cos 45^\circ}{2}=\frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}=\frac{2+\sqrt{2}}{4}$$

이고, $\cos 22.5^\circ>0$이므로

$$\cos 22.5^\circ=\mathbf{\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}}$$

보기 **2.** α가 제 2사분면의 각이고 $\cos\alpha=-\frac{3}{5}$일 때, $\sin\frac{\alpha}{2}$와 $\cos\frac{\alpha}{2}$의 값을 구하여라.

연구 $\sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{2}$, $\cos^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{2}$이므로

$$\sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{2}=\frac{1+\frac{3}{5}}{2}=\frac{4}{5}$$

$$\cos^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{2}=\frac{1-\frac{3}{5}}{2}=\frac{1}{5}$$

α가 제 2사분면의 각이므로 $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$, $\frac{\pi}{4}<\frac{\alpha}{2}<\frac{\pi}{2}$

따라서, $\frac{\alpha}{2}$는 제 1사분면의 각이므로

$\sin\frac{\alpha}{2}>0$, $\cos\frac{\alpha}{2}>0$

$\therefore \sin\frac{\alpha}{2}=\mathbf{\frac{2\sqrt{5}}{5}}$, $\cos\frac{\alpha}{2}=\mathbf{\frac{\sqrt{5}}{5}}$

더 알아보자

❀ 배각의 공식에서 α 대신에 $\frac{\alpha}{2}$를 대입하면 반각의 공식을 구할 수 있다. 즉

(1) $\cos2\alpha=1-2\sin^2\alpha$에서

$\sin^2\alpha=\frac{1-\cos2\alpha}{2}$이므로

α 대신 $\frac{\alpha}{2}$를 대입하면

$\sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{2}$

(2) $\cos2\alpha=2\cos^2\alpha-1$에서

$\cos^2\alpha=\frac{1+\cos2\alpha}{2}$이므로

α 대신 $\frac{\alpha}{2}$를 대입하면

$\cos^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{2}$

6 삼각함수의 곱을 합 또는 차로 고치는 공식

(1) $\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\}$

(2) $\cos\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)\}$

(3) $\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\}$

(4) $\sin\alpha\sin\beta=-\frac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)\}$

보기 **1.** $\cos 2\alpha\sin\alpha$를 삼각함수의 합 또는 차의 꼴로 나타내어라.

연구 $\cos\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)\}$이므로

$$\cos 2\alpha\sin\alpha=\frac{1}{2}\{\sin(2\alpha+\alpha)-\sin(2\alpha-\alpha)\}$$
$$=\mathbf{\frac{1}{2}(\sin 3\alpha-\sin\alpha)}$$

보기 **2.** $\sin 15^\circ\sin 45^\circ$를 삼각함수의 합 또는 차의 꼴로 나타내어라.

연구 $\sin\alpha\sin\beta=-\frac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)\}$이므로

$$\sin 45^\circ\sin 15^\circ=-\frac{1}{2}\{\cos(45^\circ+15^\circ)-\cos(45^\circ-15^\circ)\}$$
$$=-\frac{1}{2}(\cos 60^\circ-\cos 30^\circ)$$
$$=\mathbf{\frac{\sqrt{3}-1}{4}}$$

7 삼각함수의 합 또는 차를 곱으로 고치는 공식

(1) $\sin A+\sin B=2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$

(2) $\sin A-\sin B=2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}$

(3) $\cos A+\cos B=2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$

(4) $\cos A-\cos B=-2\sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}$

보기 **1.** $\cos 3\alpha+\cos\alpha$를 삼각함수의 곱의 꼴로 나타내어라.

연구 $\cos A+\cos B=2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$이므로

$$\cos 3\alpha+\cos\alpha=2\cos\frac{3\alpha+\alpha}{2}\cos\frac{3\alpha-\alpha}{2}$$
$$=\mathbf{2\cos 2\alpha\cos\alpha}$$

더 알아보자

삼각함수의 곱을 합 또는 차로 고치는 공식에서 $\alpha+\beta=A$, $\alpha-\beta=B$로 놓으면

$\alpha=\frac{A+B}{2}$, $\beta=\frac{A-B}{2}$

이고, 이 공식을 A, B에 대한 식으로 변형하면 삼각함수의 합 또는 차를 곱으로 고치는 공식을 유도할 수 있다.

보기 **2.** $\sin 75^\circ + \sin 15^\circ$의 값을 구하여라.

연구 $\sin A + \sin B = 2\sin\dfrac{A+B}{2}\cos\dfrac{A-B}{2}$이므로

$$\begin{aligned}\sin 75^\circ + \sin 15^\circ &= 2\sin\frac{75^\circ+15^\circ}{2}\cos\frac{75^\circ-15^\circ}{2}\\ &= 2\sin 45^\circ\cos 30^\circ\\ &= 2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\\ &= \boldsymbol{\frac{\sqrt{6}}{2}}\end{aligned}$$

8 삼각방정식의 일반해

삼각함수는 주기함수이므로 해가 존재하는 경우 특정한 범위가 주어지면 유한개의 해(특수해)를 갖는 반면에, 특정한 범위가 주어지지 않을 때는 무수히 많은 해를 갖게 된다. 이러한 무수히 많은 해를 일반각으로 나타낸 것을 일반해라고 한다.

(1) $\sin x = a\ (|a| \leq 1)$의 한 특수해가 α이면

$\Rightarrow\ x = n\pi + (-1)^n\alpha$

(2) $\cos x = a\ (|a| \leq 1)$의 한 특수해가 β이면

$\Rightarrow\ x = 2n\pi \pm \beta$

(3) $\tan x = a$의 한 특수해가 γ이면

$\Rightarrow\ x = n\pi + \gamma$(단, n은 정수)

보기 **1.** 삼각방정식 $\sin x = \dfrac{1}{2}$의 해를 구하여라.

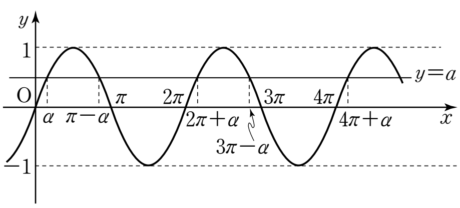
연구 $0 \leq x \leq 2\pi$에서 $\sin x = \dfrac{1}{2}$의 특수해를 구하면

$x = \dfrac{\pi}{6}$ 또는 $x = \dfrac{5}{6}\pi$

따라서, $\sin x = \dfrac{1}{2}$의 일반해는

$\boldsymbol{x = n\pi + (-1)^n\dfrac{\pi}{6}}$**(단, n은 정수)**

$\sin x = a\ (|a| \leq 1)$의 일반해



더 알아보자

삼각방정식의 해법

① $a\sin x + b\cos x = c$ 꼴은 삼각함수를 합성한다.

② 배각 공식, 반각 공식을 이용하여 삼각함수의 곱의 꼴로 변형한다.

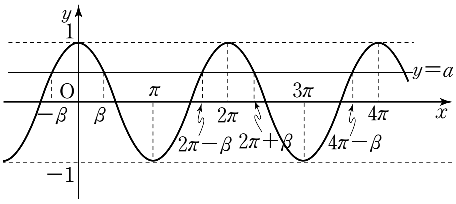
③ 합·차를 곱으로, 곱을 합·차로 고치는 공식을 이용하여 곱의 꼴로 변형한다.

보기 **2.** 삼각방정식 $\cos x=\frac{1}{\sqrt{2}}$의 해를 구하여라.

연구 $0\leq x<2\pi$에서 $\cos x=\frac{1}{\sqrt{2}}$의 특수해를 구하면 $x=\frac{\pi}{4}$ 또는 $x=\frac{7}{4}\pi$

따라서, $\cos x=\frac{1}{\sqrt{2}}$의 일반해는 $\boldsymbol{x=2n\pi\pm\frac{\pi}{4}}$ **(단, $\boldsymbol{n}$은 정수)**

$\cos x=a(|a|\leq 1)$의 일반해

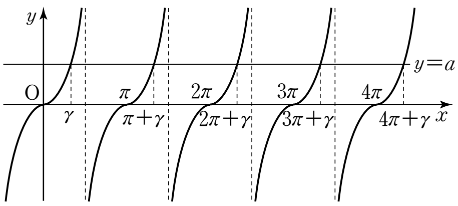


보기 **3.** 삼각방정식 $\tan x=-1$의 해를 구하여라.

연구 $0\leq x<2\pi$에서 $\tan x=-1$의 특수해를 구하면 $x=\frac{3}{4}\pi$ 또는 $x=\frac{7}{4}\pi$

따라서, $\tan x=-1$의 일반해는 $\boldsymbol{x=n\pi+\frac{3}{4}\pi}$ **(단, $\boldsymbol{n}$은 정수)**

$\tan x=a$의 일반해



보기 **4.** 삼각방정식 $\sin 2\theta-\sin\theta=0$의 해를 구하여라.

연구 배각의 공식에 의해 $2\sin\theta\cos\theta-\sin\theta=0$

$\sin\theta(2\cos\theta-1)=0$ $\quad\therefore\ \sin\theta=0$ 또는 $\cos\theta=\frac{1}{2}$

특수해 중의 하나가 각각 0, $\frac{\pi}{3}$이므로

$\theta=\boldsymbol{n\pi}$ **또는** $\theta=\boldsymbol{2n\pi\pm\frac{\pi}{3}}$ **(단, $\boldsymbol{n}$은 정수)**

보기 **5.** 삼각방정식 $\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta=1$일 때, θ의 값을 구하여라.

연구 $\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta=2\left(\frac{1}{2}\cos\theta+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta\right)=2\cos\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)=1$

이므로 $\cos\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}$

특수해 중의 하나가 $\frac{\pi}{3}$이므로 $\theta-\frac{\pi}{3}=2n\pi\pm\frac{\pi}{3}$

$\therefore\ \theta=\boldsymbol{2n\pi+\frac{2}{3}\pi}$ **또는** $\theta=\boldsymbol{2n\pi}$ **(단, $\boldsymbol{n}$은 정수)**

더 알아보자

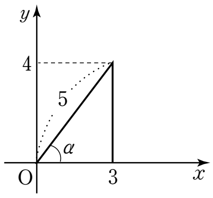
삼각방정식의 풀이법
곱의 형태로 고쳐진 삼각방정식에서 해를 구할 때는 제한 범위가 주어지면 특수해를, 제한 범위가 주어지지 않은 경우에는 단위원 또는 그래프를 이용하여 일반해를 구한다.

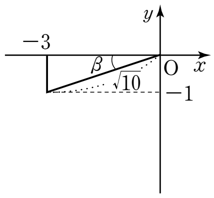
교과서 원리 확인 학습

삼각함수의 덧셈정리

1 $\cos\alpha=\frac{3}{5}$, $\sin\beta=-\frac{1}{\sqrt{10}}$일 때, $\cos(\alpha+\beta)$를 구하여라. (단, α, β는 각각 제 1 사분면의 각, 제 3 사분면의 각이다.)

Hint α와 β에 대한 그림을 그리면 다음과 같다.





위의 그림에서

$\sin\alpha=\frac{4}{5}$, $\cos\beta=-\frac{3}{\sqrt{10}}$이므로

$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$에 대입한다.

두 직선이 이루는 각

2 두 직선 $3x-y+2=0$, $y=\frac{1}{2}x-1$이 이루는 예각의 크기를 구하여라.

Hint 두 직선이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 각각 θ_1, θ_2라 하고, 두 직선이 이루는 예각의 크기를 θ라 하면, $\theta=\theta_1-\theta_2$이다.

두 직선의 기울기는 각각 $\tan\theta_1$, $\tan\theta_2$이므로

$$\tan\theta=\tan(\theta_1-\theta_2)=\frac{\tan\theta_1-\tan\theta_2}{1+\tan\theta_1\tan\theta_2}$$

$$=\frac{3-\frac{1}{2}}{1+3\times\frac{1}{2}}=1$$

탄젠트의 덧셈정리

3 방정식 $x^2+12x+10=0$의 두 근을 $\tan\alpha$, $\tan\beta$라 할 때, $\cos(\alpha+\beta)$의 값을 구하여라.

$\left(단,\ -\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{\pi}{2},\ -\frac{\pi}{2}<\beta<\frac{\pi}{2}\right)$

Hint 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의해

$\tan\alpha+\tan\beta=-12(<0)$, $\tan\alpha\cdot\tan\beta=10(>0)$이므로 $\tan\alpha<0$이고 $\tan\beta<0$이다.

따라서, α와 β는 모두 제 4 사분면의 각이다. $\left(-\frac{\pi}{2}<\alpha,\ \beta<0\right)$

탄젠트의 덧셈정리에 의하면 $\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\frac{4}{3}$이므로

$$\cos^2(\alpha+\beta)=\frac{1}{\sec^2(\alpha+\beta)}=\frac{1}{1+\tan^2(\alpha+\beta)}=\frac{9}{25}$$

또한 $-\pi<\alpha+\beta<0$이고, $\tan(\alpha+\beta)>0$이므로 $\alpha+\beta$는 제 3 사분면의 각이다.

정답 1. $-\frac{\sqrt{10}}{10}$ 2. $\frac{\pi}{4}$ 3. $-\frac{3}{5}$

삼각함수의 합성

4 $x^2+y^2=1$일 때, $2x+3y$의 최대값을 구하여라.

Hint $x^2+y^2=1$에서 $x=\cos\theta$, $y=\sin\theta$라 하면

$2x+3y=2\cos\theta+3\sin\theta$이다.

$$\therefore 2\cos\theta+3\sin\theta=\sqrt{13}\left(\frac{2}{\sqrt{13}}\cos\theta+\frac{3}{\sqrt{13}}\sin\theta\right)$$

$$=\sqrt{13}(\sin\alpha\cos\theta+\cos\alpha\sin\theta)$$

$$=\sqrt{13}\sin(\alpha+\theta)\left(\text{단, }\sin\alpha=\frac{2}{\sqrt{13}},\ \cos\alpha=\frac{3}{\sqrt{13}}\right)$$

삼각함수의 반각의 공식

5 $\frac{3}{2}\pi<\alpha<2\pi$이고, $\tan\alpha=-\frac{3}{4}$일 때, $\cos\frac{\alpha}{2}$의 값을 구하여라.

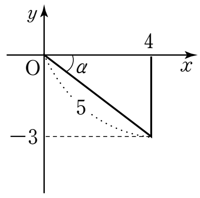
Hint $\cos^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{2}$이므로 $\cos\alpha$의 값을 구해야 한다.

오른쪽 그림에서 보면 $\cos\alpha=\frac{4}{5}$이다.

따라서, $\cos^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{2}=\frac{9}{10}$

$\frac{3}{2}\pi<\alpha<2\pi$에서 $\frac{3}{4}\pi<\frac{\alpha}{2}<\pi$이므로 $\frac{\alpha}{2}$는 제 2 사분면의 각이다.

따라서, $\cos\frac{\alpha}{2}<0$이다.



삼각함수의 합 · 차를 곱으로 고치는 공식

6 $\sin 5^\circ+\sin 125^\circ-\sin 115^\circ$의 값을 구하여라.

Hint $\sin 5^\circ+\sin 125^\circ$를 먼저 계산해 보면

(준식)$=2\sin 65^\circ\cos 60^\circ-\sin(180^\circ-65^\circ)$

$=2\sin 65^\circ\cdot\frac{1}{2}-\sin 65^\circ$

삼각함수의 합 · 차를 곱으로 고치는 공식

7 $\theta=\frac{2}{15}\pi$일 때, $\cos\theta+\cos2\theta+\cos3\theta+\cos4\theta+\cos6\theta+\cos7\theta$의 값을 구하여라.

Hint $\cos5\theta=\cos\frac{2}{3}\pi=-\frac{1}{2}$이므로

$\cos3\theta+\cos7\theta=2\cos5\theta\cos2\theta=2\left(-\frac{1}{2}\right)\cos2\theta=-\cos2\theta$

$\cos4\theta+\cos6\theta=2\cos5\theta\cos\theta=2\left(-\frac{1}{2}\right)\cos\theta=-\cos\theta$

$\therefore$ (준식)$=\cos\theta+\cos2\theta-\cos2\theta-\cos\theta$

배각의 공식과 삼각함수의 합성

8 $y=2\cos^2x+2\sqrt{3}\sin x\cos x-1$의 최대값을 구하여라.

Hint 배각의 공식에 의하면,

$2\cos^2x-1=\cos 2x$, $2\sin x\cos x=\sin 2x$이므로

삼각함수의 합성을 이용하면

$y=\cos 2x+\sqrt{3}\sin 2x$

$=2\left(\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x\right)=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$

정답 4. $\sqrt{13}$ 5. $-\frac{3\sqrt{10}}{10}$ 6. 0 7. 0 8. 2

배각의 공식과 삼각방정식

9

삼각방정식 $\cos 2x+\sin x=1$의 해를 구하여라.

Hint $\cos 2x=1-2\sin^2 x$이므로 주어진 식은

$2\sin^2 x-\sin x=0$에서 $\sin x=\frac{1}{2}$ 또는 0

$$0\leqq x\leqq 2\pi\text{에서}\begin{cases}\sin x=\frac{1}{2}\text{의 특수해를 구하면 } x=\frac{\pi}{6}\text{ 또는 }\frac{5}{6}\pi\\ \sin x=0\text{의 특수해를 구하면 } x=0\text{ 또는 }\pi\end{cases}$$

삼각함수의 합성과 삼각방정식

10

삼각방정식 $\cos x-\sin x=\sqrt{2}$의 해를 구하여라.

Hint $\cos x-\sin x=\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos x-\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x\right)$

$=\sqrt{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}$

이므로 $\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=1$

$\therefore x+\frac{\pi}{4}=2n\pi$

삼각함수의 합, 차를 곱으로 고치는 공식

11

$\triangle$ABC에서 $\cos A+\cos B=\sin A+\sin B$일 때, C의 값을 구하여라.

Hint 주어진 식에서 합을 곱의 꼴로 고치면

$2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}=2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$

$\cos\frac{A-B}{2}\neq 0(\because A-B\neq\pi)$이므로

$\cos\frac{A+B}{2}=\sin\frac{A+B}{2}$

$0<A+B<\pi$이므로 $\frac{A+B}{2}$는 제 1 사분면의 각이다.

따라서, $\frac{A+B}{2}=\frac{\pi}{4}$이므로 $A+B=\frac{\pi}{2}$

삼각방정식

12

삼각방정식 $\cos 2x+\cos x=0$의 모든 근의 총합을 구하여라. (단, $0\leqq x<\pi$)

Hint $\cos 2x+\cos x=2\cos\frac{3}{2}x\cos\frac{x}{2}=0$

$\therefore \cos\frac{3}{2}x=0$ 또는 $\cos\frac{x}{2}=0$

i) $\cos\frac{3}{2}x=0$을 만족하는 x의 값은 $0\leqq\frac{3}{2}x<\frac{3}{2}\pi$에서 $\frac{3}{2}x=\frac{\pi}{2}$

ii) $0\leqq\frac{x}{2}<\frac{\pi}{2}$에서 $\cos\frac{x}{2}=0$을 만족하는 x의 값은 없다.

정답 9. $x=n\pi$ 또는 $x=n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{6}$ (단, n은 정수) 10. $x=2n\pi-\frac{\pi}{4}$ (단, n은 정수) 11. $C=\frac{\pi}{2}$ 12. $\frac{\pi}{3}$

기초쌓기

1 삼각함수의 배각의 공식과 덧셈정리

$-\sin^2 x+\sin^2\left(\frac{\pi}{6}+x\right)+\sin^2\left(\frac{\pi}{6}-x\right)$를 간단히 하여라.

착안점 배각의 공식을 사용하여 모든 식을 $2x$에 대한 식으로 변형하여 계산한다.

풀이 $-\sin^2 x+\sin^2\left(\frac{\pi}{6}+x\right)+\sin^2\left(\frac{\pi}{6}-x\right)$

$=\frac{1}{2}\left\{\cos 2x-1+1-\cos\left(\frac{\pi}{3}+2x\right)+1-\cos\left(\frac{\pi}{3}-2x\right)\right\}$

$=\frac{1}{2}\left(\cos 2x+1-2\cos\frac{\pi}{3}\cos 2x\right)$

$=\frac{1}{2}(1+\cos 2x-\cos 2x)$

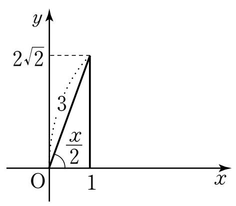
$=\mathbf{\frac{1}{2}}$ 답

2 삼각함수의 배각의 공식

$0<x<\pi$에서 $\tan\frac{x}{2}=2\sqrt{2}$일 때, $\sin x$의 값을 구하여라.

착안점 $\sin x=2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$이고 $0<\frac{x}{2}<\frac{\pi}{2}$이므로 좌표평면에 삼각형을 그린 다음, 삼각함수의 정의를 이용하여 $\sin\frac{x}{2}$와 $\cos\frac{x}{2}$의 값을 구한다.

풀이 $\frac{x}{2}$가 제1사분면의 각이므로



위의 그림에서 $\sin\frac{x}{2}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$, $\cos\frac{x}{2}=\frac{1}{3}$

따라서, 구하는 $\sin x$의 값은

$\sin x=2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$

$=2\cdot\frac{2\sqrt{2}}{3}\cdot\frac{1}{3}$

$=\mathbf{\frac{4\sqrt{2}}{9}}$ 답

3 삼각함수의 합성을 이용한 최대 · 최소 구하기

함수 $f(x)=\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)+\cos x$의 최대값과 최소값을 구하여라.

착안점 삼각함수의 덧셈정리를 이용하여 식을 간단히 한 다음, 삼각함수를 합성하여 최대값과 최소값을 구한다.

풀이 $f(x)=\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)+\cos x$

$=\sin x\cos\frac{\pi}{6}-\cos x\sin\frac{\pi}{6}+\cos x$

$=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x+\frac{1}{2}\cos x$

$=\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$

이므로 최대값은 **1**, 최소값은 $\mathbf{-1}$ 답

4 삼각함수 합성의 응용

함수 $y=4\sin x+4\cos x-(\sin x+\cos x)^2$의 최대값을 구하여라.

착안점 $\sin x+\cos x=t$로 치환하고 $-\sqrt{2}\leq t\leq\sqrt{2}$임을 이용하여 이차식의 최대값을 구한다.

풀이 $\sin x+\cos x=t$로 치환하면

$y=4(\sin x+\cos x)-(\sin x+\cos x)^2$

$=4t-t^2$

$=-(t^2-4t+4)+4$

$=-(t-2)^2+4$

그런데 $\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$이므로

$-\sqrt{2}\leq t\leq\sqrt{2}$ 이다.

따라서, $t=-\sqrt{2}$일 때, 최소값을 갖고,

$t=\sqrt{2}$일 때, 최대값 $\mathbf{4\sqrt{2}-2}$를 갖는다. 답

5 삼각함수의 성질을 이용한 삼각방정식

삼각방정식 $2\cos^2 x-\sin x-1=0$의 근의 개수를 구하여라. (단, $0<x<2\pi$)

착안점 $\cos^2 x=1-\sin^2 x$임을 이용하여 식을 $\sin x$에 대한 이차방정식으로 정리한 다음 푼다.

풀이 $2\cos^2 x-\sin x-1=0$

$2(1-\sin^2 x)-\sin x-1=0$

$2-2\sin^2 x-\sin x-1=0$

$2\sin^2 x+\sin x-1=0$

$(\sin x+1)(2\sin x-1)=0$

$\sin x=-1$ 또는 $\sin x=\frac{1}{2}$

$\therefore x=\frac{3}{2}\pi,\ \frac{\pi}{6},\ \frac{5}{6}\pi$

따라서, 근은 **3개**이다. 답

6 배각의 공식을 이용한 삼각방정식

방정식 $\cos 2x=\cos x+2$의 해를 구하여라.

착안점 배각의 공식을 이용하여 식을 $\cos x$에 대한 이차방정식으로 정리한 후 해를 구한다. 단, 주어진 범위가 없으므로 일반해를 구해야 함을 주의한다.

풀이 $\cos 2x=2\cos^2 x-1$이므로 주어진 식에 대입하여 정리하면

$2\cos^2 x-\cos x-3=0$

$(\cos x+1)(2\cos x-3)=0$

$\cos x=-1$ 또는 $\cos x=\frac{3}{2}$

$-1\leqq\cos x\leqq 1$이므로 $\cos x\neq\frac{3}{2}$

$\therefore \cos x=-1$

$\cos x=-1$의 특수해 중의 하나가 π이므로

$\boldsymbol{x=(2n+1)\pi}$ **(단, n은 정수)** 답

7 삼각함수의 합 또는 차를 곱으로 고치는 공식을 이용한 삼각방정식

방정식 $\sin\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)+2\sin\left(x-\frac{2\pi}{3}\right)=0$의 모든 해의 합을 구하여라. (단, $0\leqq x\leqq 2\pi$)

착안점 주어진 식을

$\sin\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)+\sin\left(x-\frac{2\pi}{3}\right)+\sin\left(x-\frac{2\pi}{3}\right)=0$

이라고 생각하여 $\sin\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)+\sin\left(x-\frac{2\pi}{3}\right)$를 먼저 삼각함수의 곱에 대한 꼴로 바꾼 후 계산한다.

풀이 $\sin\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)+\sin\left(x-\frac{2\pi}{3}\right)+\sin\left(x-\frac{2\pi}{3}\right)=0$

$2\sin x\cos\frac{2}{3}\pi+\sin\left(x-\frac{2}{3}\pi\right)=0$

$\sin\left(x-\frac{2}{3}\pi\right)-\sin x=0\left(\because \cos\frac{2}{3}\pi=-\frac{1}{2}\right)$

$2\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)=0$

$\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=0$

$\left(\because \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)=-\sin\frac{\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$0\leqq x\leqq 2\pi$이므로 $-\frac{\pi}{3}\leqq x-\frac{\pi}{3}\leqq\frac{5}{3}\pi$

$x-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2},\ \frac{3\pi}{2}$이므로 $x=\frac{5}{6}\pi,\ \frac{11}{6}\pi$

따라서, 모든 해의 합은 $\boldsymbol{\frac{8}{3}\pi}$ 답

8 삼각방정식의 응용

방정식 $\cos 2x+2\sin x=a$가 근을 갖기 위한 a의 최대값과 최소값의 합을 구하여라.

착안점 $y=\cos 2x+2\sin x$와 $y=a$로 분리한 후 두 그래프가 교점을 갖기 위한 a의 범위를 구한다.

풀이 $y=\cos 2x+2\sin x=1-2\sin^2 x+2\sin x$

$=-2\left(\sin^2 x-\sin x+\frac{1}{4}\right)+\frac{3}{2}$

$=-2\left(\sin x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{2}$

이므로 $\sin x=\frac{1}{2}$일 때, 최대값 $\frac{3}{2}$을 갖는다.

$-1\leqq\sin x\leqq 1$이므로 $\sin x=-1$일 때, 최소값 -3을 갖는다.

따라서, 근을 갖기 위한 a의 최대값은 $\frac{3}{2}$, 최소값은 -3이다.

$\therefore \frac{3}{2}+(-3)=\boldsymbol{-\frac{3}{2}}$ 답